独立性

本身独立性的公式 $P(AB)=P(A)P(B)$ 不是难的内容, 这可以由其事件的独立意味着不相互产生影响而得出, 具体用条件概率公式.
独立性真正难的题目是在n重独立重复实验的情况下, 以下题目也主要基于这个情景展开.

> **Example**
>
> 甲乙丙三人比赛, 规定每局两个人比赛, 胜者与第三人比赛, 直到有人连胜两局, 则判定该人胜出. 每一次比赛的胜率为$1/2$, 现让甲乙两人先比, 求各人比赛获胜的概率.

证:

设事件A_i,B_i,C_i 分别为甲, 乙, 丙在第i局获胜. 最后甲获胜记为A. 那么
此处的事件列举需严格依照连胜两局的规则, 具体步骤如下.
假设第一局甲赢, 那么接下来要么丙赢要么甲赢. 如果丙赢, 那么丙不能再赢下一局, 所以乙赢, 此局为 $1/2$ 概率. 而接下来乙对上甲, 就是甲赢. 以此类推, 甲每输一次, 就要多加三个概率为 $1/2$ 的对局.

$$
\begin{aligned}
P(A)&=P(A_1)P(A|A_1)+P(B_1)P(A|B_1)\\
&=P(A_1A_2)+P(A_1C_2B_3A_4A_5)+P(A_1C_2B_3A_4C_5B_6A_7A_8)+\ldots+P(B_1C_2A_3A_4)\\
&=\frac{1}{4}(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\ldots)+\frac{1}{16}(1+\frac{1}{2^3}+\ldots)\\
&=\frac{5}{16}\frac{1-\frac{1}{8^n}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{5}{14}
\end{aligned}
$$

由于乙与甲对称, 所以$P(B)=P(A)=\frac{5}{14}$. $P(C)=1-2P(A)=\frac{2}{7}$.

> **Example**
>
> 甲乙对赌, 各在每一局获胜的概率为 $1/2$, 甲再赢n局获胜, 乙再赢m局获胜, 此时赌局被打断. 应如何分配赌本.

证:

再进行 $m+n-1$ 局便可分出胜负. 如果让甲赢, 则其最终赢的局数大于等于 n. 所以其赢的概率为 $\sum_{i=n}^{n+m-1}\binom{n+m-1}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+m-1}$.

如果乙赢, 那么其最终赢的局数大于等于 m , 所以其赢的概率为

$\sum_{i=m}^{n+m-1}\binom{n+m-1}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+m-1}$.

由于组合数性质, $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$, 所以两边概率相加为 1.